

TD 4 : Sommes et produits Indications

Calcul des sommes

1 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- 1) $1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1$
- 2) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ puis $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$
- 3) $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n}$

2 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{k=0}^n (k+1)^3 - \sum_{k=0}^n k^3$
- 2) $\sum_{k=1}^n (-1)^k$
- 3) $\sum_{k=5}^{13} k$
- 4) $\sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4^{2k+1}}$
- 5) $\sum_{k=5}^{n+2} k^2$
- 6) $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k}$
- 7) $\sum_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k - 1}$
- 8) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

Il faut le plus souvent utiliser des réécritures, des changements d'indice et les sommes usuelles.

Pour la q. 7), on peut utiliser la formule $a^n - b^n$. Pour la q. 8), il faut réécrire ainsi : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.

3 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Démontrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

- 2) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}$

Pour la q. 2, utiliser la réécriture de la question 1 et écrire la somme sous forme développée (avec quelques termes).

4 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Calculer $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ en fonction de n .

- 2) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ en fonction de n .

1) Réécrivez l'expression pour faire apparaître un produit télescopique

2) Que vaut $\ln(a) + \ln(b)$?

5 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Que vaut la somme $S = \sum_{k=1}^n [(k+1)^4 - k^4]$?
- 2) En réécrivant S différemment, en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k^3$.

6 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $S_n = \sum_{k=1}^n kx^k$ ou x est un réel différent de 1. Calculons S_n de deux façons.

- 1) Calculer $(1-x)S_n$ et déduire S_n .
- 2) Dériver la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ de deux façons, et en déduire S_n .

1) L'expression de $(1-x)S_n$ fait intervenir deux sommes qui se ressemblent et pourraient se compenser... Il suffit de faire quelques réécritures.

2) Pour la première façon, puisque $(u+v)' = u' + v'$, on peut dériver directement chaque terme de la somme. Pour la seconde, on exprimera d'abord $f(x)$ différemment

7 ★★★ Calculer $\sum_{k=1}^{100} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$

Développer la somme en écrivant de (nombreux) premiers termes.

8 ★★ Écrire à l'aide de factorielles

- 1) $17 \times 16 \times 15 \times 14$
- 2) $16 \times 14 \times 12 \times \dots \times 4 \times 2$
- 3) $15 \times 13 \times 11 \times \dots \times 5 \times 3 \times 1$

9 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

10 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$

Faire des réécritures du type “+1 – 1”

11 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n k \times k! = (n+1)! - 1$$

Faire des réécritures du type “+1 – 1”

12 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Simplifier les produits le plus possible en les exprimant avec des puissances ou des factorielles :

- 1) $\prod_{k=1}^n 2^k$
- 2) $\prod_{k=1}^n 2k$
- 3) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
- 4) $\prod_{k=0}^n (2k+1)$
- 5) $\prod_{p=1}^n \frac{2p+1}{2p+5}$
- 6) $\prod_{k=1}^n \frac{3^k}{k^2}$

Pour la q. 5), écrire le produit sous forme développée avec plusieurs termes (au moins 3 de part et d'autre des ...)

13 ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad 2. \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \quad 3. \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

Pour S_3 , on pourra s'inspirer de la réécriture de l'exercice 14

14 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer de deux manières différentes la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

- 1) (a) Démontrer que pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ (on l'appelle la formule du capitaine).
(b) En déduire S_n .
- 2) Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$. On admet que f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
(a) Calculer la dérivée de f de deux façons différentes.
(b) En déduire S_n .

2 Pour la question a), on peut réécrire $f(x)$ différemment par une formule bien connue

15 ★★★ En s'inspirant de la preuve de la formule du capitaine (cf exercice précédent), calculer :

$$1. \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \quad 2. \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} \quad 3. \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$$

Dans chaque cas, il faut se débarrasser du $\frac{1}{k+1}$ ou du k^2 en réalisant une réécriture avec le coefficient binomial : celui-ci peut “absorber” ce terme en k pour donner à la place un terme en n , qui lui ne dépend plus de k !

16 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer :

$$S_1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$S_2 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

2) En déduire $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}$.

1) Réécrire l'expression sous la forme d'une somme.

2) Que vaut $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$? Cela peut vous aider...

19 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j)$

Découper la seconde somme en deux pour exploiter l'écriture différente de $\min(i, j)$ selon que $j \leq i$ ou $j \geq i$

20 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i+j=n}} ij$

On peut réécrire cette somme en

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j=n-i}}^n ij$$

Sommes doubles

17 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i$

3) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij$

2) $\sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

4) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (j-i)$

Ce sont des sommes rectangulaires ! Un calcul direct suffit en général... Sauf pour la dernière

18 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$

3) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}$

2) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j$

4) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)$

Pour la dernière somme, on ne cherchera pas à calculer la somme $\sum_{i=1}^n i^3$.

Si nécessaire, transformer l'expression pour avoir deux symboles $\sum$ (un par indice). Essayer de calculer de manière directe, et si cela n'aboutit pas, faites une intervention de sommes.